**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**CENTRO TECNOLÓGICO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISCIPLINA EMC 5412 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**TRABALHO 7**

**O PROBLEMA DO CILINDRO GIRANTE**

**Professor: António Fábio Carvalho da Silva**

**Aluno: Gusttav Bauermann Lang**

**Matrícula: 13200534**

**Florianópolis, 09 de Junho de 2017**

1. Solução analítica

A distribuição de temperaturas para um cilindro em regime permantente e sem geração interna de calor é dada pela seguinte equação:

Aplicando condições de temperatura prescrita nos raios interno e externo, a equação se transforma em:

1. Desenvolvimento

A primeira lei da termodinâmica para um volume de controle é dada pela seguinte equação:

Para a resolução deste problema são adotadas as seguinte hipóteses:

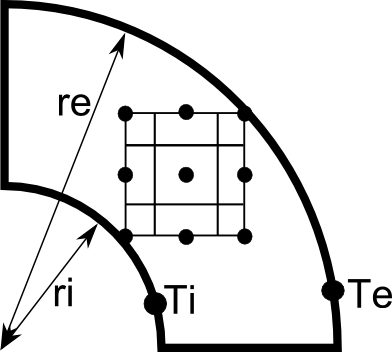
* Condução bidimensional nas direções x e y;
* Propriedades térmicas constantes;
* Não há geração interna de calor;
* Regime permanente;
* Variações das energias cinética e potencial desprezíveis;
* Desprezado o trabalho das forças viscosas;

Aplicando estas hipóteses, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

Para discretizar esta equação, é feita a integração aproximada da equação diferencial para os volumes internos da malha, que pode ser vizualizada na figura 1. Assim, é obtido:

onde:

Sendo que H é o comprimento do cilindro, que para a resolução do problema é considerado como 1m.



**Figura 1 –** Malha utilizada no problema

As condinções de contorno são de temperatura prescrita em todas as faces. Estas temperaturas são obtidas a partir da solução analítica do problema. Logo, para estes volumes :

onde:

Para cada volume de controle, as velocidades em cada interface são distintas entre si, a princípio. Como o cilindro gira com velocidade angular constante, o vetor da velocidade tangencial depende do raio do ponto desejado. Assim é possível decompor o vetor velocidade nas compontes e , para as direções e , respectivamente. As relações entre as velocidades encontram-se nas equações abaixo:

Sendo que e são as coordenadas das posições centrais de cada face.

Vale ressaltar que o cilindro gira no sentido anti-horário. Logo o sentido das componentes da velocidade é de leste para oeste na horizontal, enquanto na vertical de sul para norte. Assim a componente horizontal da velocidade tem sinal negativo e a componente vertical da velocidade tem sinal positivo.

Para avaliar as temperaturas das interfaces () nos volumes internos, serão utilizados 3 esquemas: CDS, UDS e exponencial.

No esquema CDS, as temperaturas são representadas pela média aritmética das temperaturas dos volumes de controle adjacentes. Assim a equação discretizada é:

onde:

No esquema UDS, a temperatura na interface do volume de controle depende da direção do fluxo de massa. O mesmo é positivo quando para direita ou para cima e negativo quando é pra esquerda ou para baixo. Logo:

Assim obtém-se:

onde:

O esquema exponencial considera a solução analítica exata obtida a partir da equação da energia, considerando transferência de calor unidimensional em regime permanente e sem geração de calor, para avaliar a temperatura na interface do volume de controle. Assim, a esquação para este esquema é:

onde:

O número de Peclét é avaliado em cada interface e descrito por:

Os parâmetros que foram utilizados para resolver o problema podem ser vizualisados na tabela 1.

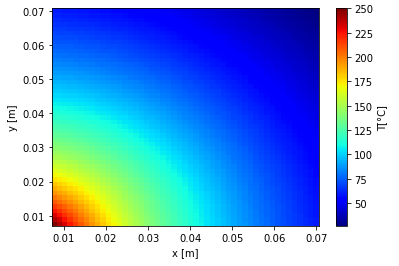
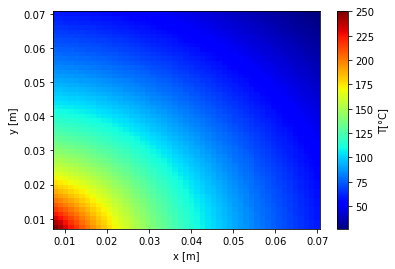
|  |  |
| --- | --- |
| Condutividade térmica [W/mºC]: |  |
| Densidade [kg/m³]: | 7800 |
| Calor específico [J/kg.K]: cp | 486 |
| Raio interno [m]: |  |
| Raio externo [m]: |  |
| Comprimento do cilindro [m]: | 1 |
| Temperatura interna [ºC]: | 25 |
| Temperatura externa [ºC]: | 250 |

**Tabela 1 –** Parâmetros utilizados

1. Resultados

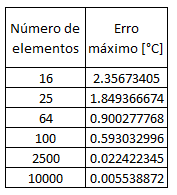
Primeiramente será avaliado o problema com o cilindro parado. Assim, para avaliar o perfil de temperaturas ao longo do raio, a malha do domínio do cilindro foi discretizada utilizando uma malha igualmente espaçada e com o mesmo número de elementos, ao longo da direção horizontal e vertical, considerando regime permanente e que as propriedades do material do cilindro sejam constantes. A posição da malha em relação ao centro do cilindro foi utilizada como 45º.

O perfil de temperaturas para os resultados numéricos e os resultados analíticos podm ser vizualizados na figura 2.



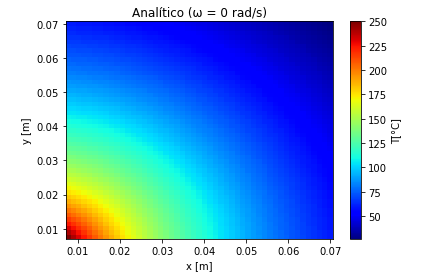
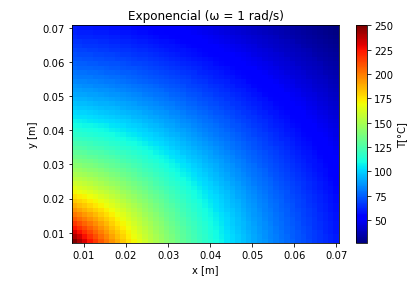
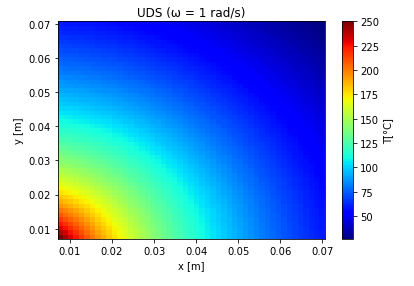
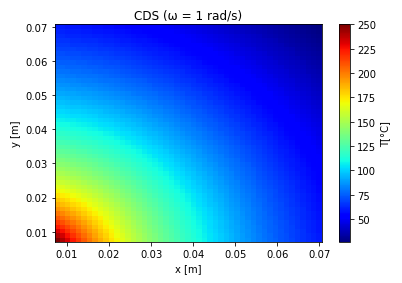
**Figura 2 –** Resultado analatíco (a esquerda) e numérico (a direita) com malha

Pela figura 2, fica difícil perceber a diferença entre o resultado numérico e analítico. Assim, é mostrado na tabela 2 o erro máximo para diferentes malhas.



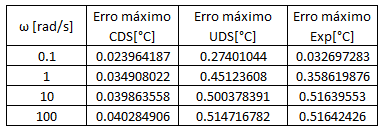
**Tabela 2 –** Erro máximo para diferentes malhas

No momento em que o cilindro começa a girar, o problema passa de uma situação de transferência de calor por difusão pura para uma situação que engloba advecção e difusão. Logo, nesta situação é necessário o uso de funções de interpolação para buscar estimar a temperatura na interface dos volumes de controle. Nesta análise, o cilindro gira em sentido anti-horário. Os resultados para as 3 funções de interpolação podem ser vizualisadas na figura 3.



**Figura 3 –** Comparação dos esquemas CDS, UDS e exponencial com malha

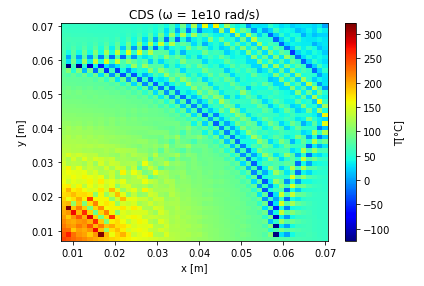
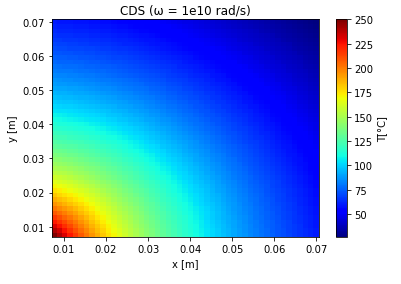
Na Figura 3 pode-se observar que o perfil de temperatura obtido pelos três métodos apresentam resultados muito próximos, além de obter perfis de temperatura neste domínio do cilindro que é muito próximo ao obtido com a solução analítica exata para a distribuição de temperatura ao longo do raio do cilindro, quando o mesmo está parado. Para uma melhor avaliação da influência da velocidade angular, é mostrado da tabela 3 erros para diferentes velocidades angulares.



**Tabela 3 -** Comparação do erro máximo absoluto obtido pelos métodos CDS, UDS exponencial para uma malha

Como se pode observar nas tabela 3, o aumento da velocidade angular com que o cilindro gira resulta em um aumento do erro absoluto para todos os métodos apresentados. Devido as condições de temperatura prescrita em todas as fronteiras, pode-se afirmar que o valor absoluto do erro próximo ao raio interno e ao raio externo é mais baixo, e cresce a medida que se aproxima do raio médio do cilindro.

Quando comparados os resultados obtidos entre as três funções de interpolação utilizadas, o método CDS conseguiu obter os melhores resultados, com maior proximidade da solução analítica exata. O esquema exponencial inicialmente apresentou um resultado bem próximo do método CDS, porém com o aumento da velocidade angular do cilindro fez com que o valor absoluto do erro aumenta-se. O método UDS é o que apresentou o maior valor absoluto do erro para os casos com velocidades baixas. Estes erros podem evidenciar a influência de difusão numérica no problema.

Por último, vale ressaltar que devido aos coeficientes negativos o esquema CDS pode ser fisicamente inconsistente. Para evidenciar este fato, é mostrado na figura 4 velocidades angulares muito grandes, que seriam impraticáveis na realidade. 

**Figura 4 –** Comparação dos esquemas CDS, UDS para altas velocidades, com malha